

A Matematika, mint a tudatos gondolkodás művészete



A cím magyarázatával kell kezdenünk: ebben az írásban szeretnénk árnyalni a matematikáról kialakult közképet, és szeretnénk bemutatni a matematika (mint kortárs tudomány) néhány kevésbé ismert aspektusát. Megkíséreljük kifejteni, hogy egy tágabb perspektívából nézve, mi is a matematika, milyen főbb mozzanatainak vannak a matematikai megismerésnek, illetve, hogy a matematikus munka közben milyen szellemi, és érzelmi folyamatokon megy keresztül. Bízunk benne, hogy sikerül néhány – sajnos, széles körben elterjedt – félreértést tisztáznunk.

Talán evolúciós eredete lehet az emberiség régi vágyának: mindannyian meg szeretnénk érteni a minket körülvevő valóságot, hogy eligazodjunk benne. Gondolkodásunk képes tükrözni a valóság egy-egy szeletét, alkotó fantáziánk pedig – e tudati tükörképre alapozva – képes olyan helyzeteket is végiggondolni, elemezni, melyek valójában nem történtek meg, nincs róluk közvetlen tapasztalati élményünk.

A valóság ilyen tükrözésére, modellezésére három nagy szellemi irányzat alakult ki: a teológia, a művészetek és a tudományok. Mindegyik irányzat célja a valóság előbb említett leírása, továbbgondolása, magyarázata. E három irányzat közül most a tudományra, azon belül is a matematikára, a matematikai megismerésre koncentrálunk.

1. Mi a matematika?

Először azt kell tisztázni, hogy mi is a matematika. Általános iskolában egy tantárgy; akik alaposabban elmélyednek benne, azok számára egy gondolkodásmód, és akik felsőbb szintű tanulmányaikban, munkájukban a matematika iránt köteleződnék el, azok számára egy életforma. Alább igyekszünk ennek az életformának valamilyen hangulati elemét érzékeltetni. Arra törekszünk, hogy ezt az irományt viszonylag röviden tartsuk, ezért bizonyos gondolatokat nem fejtünk ki teljes részletességgel. Emiatt jócskán maradhat szövegünkben filozófiai szempontból vitatható vagy hiányolható részlet. Tisztában vagyunk az ilyen kritikák jogosságával; e pontatlanságokat egy jóval hosszabb szövegben lehetne megpróbálni kiküszöbölni.

Talán egyszerűbb arra válaszolni, hogy mi *nem azonos* a matematikával. A matematika – mint jelenleg is alakuló, fejlődő tudomány – egészen más, sokkal több annál, mint amit középiskolai tanulmányaink során megismertünk. A matematika nem egyszerű szabály-gyűjtemény, és nem azonos az egyenletek gépies – és ismerjük be: olykor, unalmas és száraz – megoldási módszereivel. A középiskolai matematika tananyaga természetesen része a matematikának, de túlnyomó hányada tartalmában is, komplexitásában is, többszáz éves elmaradásban van a matematikától, mint kortárs tudománytól.

A többszáz év késés ellenére e területek mondandói ma is érvényesek, de sajnos a közoktatás keretei között nem mindig sikerül átadni azt az intellektuális örömet, mellyel a matematikai megismerés az utóbbi évszázadok során gazdagította az emberiséget.

2. A Matematikai megismerésről

A matematikai megismerés folyamata két fő részre tagolható: modellalkotásra, valamint e modellek elemzésére, vizsgálatára. A két folyamat természete lényegesen különbözik egymástól.

2.1 Keretrendszer a modellalkotáshoz, fogalomalkotáshoz.

Egyrészt, a matematika – mint a tudatos gondolkodás művészete – nagyon megengedő. Biztosítja a fogalmi kereteket a valóság (egy szeletének) modellezésére, de e keretek annyira általánosak, annyira absztraktak, hogy matematikai (deduktív) gondolkodásformákkal szinte minden kellő igényességgel megfogalmazott kérdéskör megvizsgálható. Rugalmasságát számtalan példa illusztrálja:

- Az Ógörög filozófia a mechanikát Zénon paradoxona miatt matematikai vizsgálatra alkalmatlannak tartotta, a klasszikus fizika mégis matematizálódott.
- A véletlen jelenségekkel kapcsolatban sokáig az a nézet volt uralkodó, hogy ezek annyira szeszélyesek, hogy a matematika szigorú, kivételt nem ismerő szabályaival tudatunk nem férhet hozzá a véletlen igazi természetéhez. Mára a valószínűségszámítás a matematika klasszikus fejezetévé vált.
- Közgazdasági, szociológiai, és más társadalomtudományi kérdésekkel kapcsolatban is azt gondolták, hogy azok képlékenységük miatt matematikai eszközökkel nem vizsgálhatók. Ezzel szemben mára e területek matematizálódása is megkezdődött, és messzire jutott.
- A 20. század elején létrejött a matematikai logika *bizonyításelmélet* nevű fejezete, melynek segítségével maga a matematikai megismerés vizsgálható matematikai módszerekkel. A bizonyításelmélet klasszikus eredményeinek hatalmas az ismeretelméleti jelentősége: a megszokott matematikai precizitással szabnak elvi korlátokat a matematikai megismerés számára.

A sort folytathatnánk olyan példákkal, mint a matematikai (kombinatorikus) kémia, vagy a genetika. Az emberiség kultúrtörténetének utóbbi tízezer évének tapasztalati ténye, hogy ha egy kérdéskörrel kellő igényességgel kezdtek gondolkodni, akkor előbb-utóbb megnyílt a lehetőség a terület matematikai eszközökkel való vizsgálata előtt is. Ha az adott kérdéskör kívül esett az adott korban művelt matematika keretein, akkor párbeszéd indult meg a problémakör specialistái (szaktudósai) és a matematikusok között; és a párbeszéd eredményeként létrejött a problématerület matematikai modellje: ami régebben nem volt matematikai eszközökkel vizsgálható, az az új fogalmi keretek között vizsgálhatóvá vált: matematizálódott.

A párbeszéd kezdeti szakaszában általában az a szkeptikus vélemény van túlsúlyban, hogy a kérdéskör matematikai eszközökkel nem vizsgálható, mégpedig a matematikai fogalmak rugalmatlansága, életidegensége, túlzottan absztrakt jellege, illetve általában, a matematikai megállapítások korlátozott érvényessége miatt.

A matematizálódás középső fázisában az a nézet válik uralkodóvá, hogy a „régie matematika” kereteit szét kellett feszíteni, dogmáit meg kellett haladni, és egy újabb, érvényesebb, mélyebb,

„igazibb” igazságokon alapuló matematikát kell (vagy kellett) létrehozni, ha ez egyáltalán lehetséges.

Végül, a befejező fázisában az új terület a matematika egy „szokásos” fejezetévé nemesedik, kiépülnek a kapcsolatok a matematika többi területével, és teljesen elfogadottá válik, hogy az adott kérdéskör is vizsgálható matematikai módszerekkel.

Ezzel a folyamattal kapcsolatban hangsúlyozzuk, hogy a matematika fejlődése során időről időre, lényegében ugyanígy megérkezünk az előbbi stációkhoz. A matematika apparátusát használva mindig ki lehetett alakítani a megfelelő fogalmi kereteket, melyek alkalmasnak bizonyultak az egyre újabb és újabb területek tanulmányozására.

A többezer éves tapasztalatok alapján úgy tűnik tehát, hogy lényegében bármilyen gondolat merül is fel, elvi akadály nincs e gondolat matematikai vizsgálatának. Ennek megfelelően, a matematika távolról sem lezárt, befejezett tudomány, hanem nagyon is eleven, jelenleg is gyorsan fejlődő diszciplína, és ahelyett, hogy lezárulna, egyre több kutatási terület lesz aktív.

2.2 Keretrendszer a modellek vizsgálatához, következtetésekhez

Az előző pontban azt hangsúlyoztuk, hogy szinte bármilyen jelenség matematikai modelljét megalkothatjuk. E modelleket tanulmányozva aztán következtetéseket vonhatunk le a kérdéses jelenséggel kapcsolatban. Ebben a pontban a matematikai jellegű következtetések természetéről lesz szó.

Következtetések levonására a matematika nagyon is pontosan körülhatárolt gondolkodásformákat enged meg. Technikai szempontból jelenleg azt mondhatjuk, hogy matematikai vizsgálatokat olyan kérdésekkel kapcsolatban tudunk végezni, melyek modellezhetők az axiomatikus halmazelméletben. Egészen konkrétan körülírható, hogy az előbbi mondat mit jelent a gyakorló matematikus (vagy akár bármilyen más indíttatású gondolkodó) számára. A matematikusok egyetemi alapképzésében e konkrét, és tudatos körülhatárolás hosszú évtizedek óta tananyag; ilyen értelemben széles körben hozzáférhető.

Ahogy azt fentebb írtuk, rendkívül figyelemreméltó tapasztalati tény, hogy az axiomatikus halmazelméletre, mint kiindulópontra alapozva, gyakorlatilag bármilyen kérdéskör vizsgálata megkezdhető.

A matematikai levezetések, a tételek vagy az elméletek formája szigorú szabályrendszernek tesz eleget (nagyjából úgy, ahogy a szonettnek, mint versformának nagyon precízen meg van kötve a szerkezete). E szigorú formai követelmények abban segítenek, hogy a gondolatok helyessége így könnyen ellenőrizhető; egy matematikai érvelés helyessége az emberi tudattól lényegében független ténykérdés. Emiatt a matematika következményfogalma jóval objektívebb más tudományok következményfogalmához képest. A matematikát következményfogalmának ez az objektivitása tünteti ki a többi tudomány közül.

2.3 A matematika, mint emberi tevékenység

Végül, szeretnénk hangsúlyozni a különbséget a gyakorló matematikus mindennapi munkamódszerének játékossága és a kész matematikai elméletek látszólagos merevsége között.

A matematikus munkája során helyes következtetéseket próbál levonni. Intuíciói, meglátásai sok forrásból származhatnak, nagyjából úgy, ahogy a zeneszerzők, írók, költők is fantáziaviláguk tapasztalásait öntik formába műveikben. A matematika előző pontban említett szigorú

szabályrendszere sohasem azt írja elő, hogy egy adott helyzetben mit *kell* csinálni, hanem csak azt, hogy mit *szabad* – ahhoz hasonlóan, mint ahogy a sakkjáték szabályrendszere is csak azt rögzíti, hogy az egyes bábukkal hogyan szabad lépni, de azt már a játékosok virtuóz fantáziájára, lényeglátására bízta, hogy mikor melyik bábuval hajtanak végre megengedett lépést.

Hogy bizonyos észrevételek, meglátások, szabályszerűségek, sőt történetek rekonstruálhatók a matematikai érvelések szigorú formai keretei között, az sokszor a természet csodája, vagy a matematikus virtuóz fantáziájának diadala a káosz felett. A bonyolultabb gondolatmenetek matematikai rekonstrukcióinak ezért sokszor komoly esztétikai értéke is van. A matematikus munkája lényegében abban áll, hogy az intuitív forrásból, fantáziavilágából származó meglátásait szabatosan – formai tulajdonságai következtében – minden kétséget kizáróan, és a lehető legáltalánosabban fordítsa le a matematika (vagy konkrétan akár az axiomatikus halmazelmélet) formalizmusára. A formalizmus egyszerűsége és általánossága teszi lehetővé, hogy e meglátások ellenőrizhetők és rengeteg konkrét szituációban alkalmazhatóak legyenek.

Ez a munka az emberiség közös, soha véget nem érő, csodálatos szellemi kalandja – számos gyönyörű sikerrel, olykor egyéni tragédiákkal, és rengeteg új kihívással, megválaszolásra váró kérdéssel.